РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

деяких завдань варіанту пробного тестування,
яке відбулось
20 березня 2021 року

на факультеті прикладної математики
ДНУ ім. Олеся Гончара

1. Знайти добуток коренів рівняння $32x^2 - 20x + 3 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{20}{32}$	$\frac{3}{32}$

Розв'язок. Очевидно, що дискримінант цього рівняння $D = (-20)^2 - 4 \cdot 32 \cdot 3 > 0$, отже, рівняння має корені, ділимо обидві частини рівняння на 32, маємо добуток цих коренів за теоремою Вієта.

Відповідь $\frac{3}{32}$; Д

2. Знайти корінь рівняння $36^{\frac{x}{2}} = 216^{\frac{5}{3}}$.

А	Б	В	Г	Д
5	2	7	4	–2

Розв'язок. Скористаємося властивістю степеню

$\left(6^2\right)^{\frac{x}{2}} = \left(6^3\right)^{\frac{5}{3}} \Rightarrow \quad 6^x = 6^5 \Rightarrow \quad x = 5$

Відповідь 5; А

3. Знайти периметр прямокутного трикутника (*см*), якщо довжини катетів відносяться як 12 : 5, а довжина медіани, що проведена до гіпотенузи, дорівнює 13 *см*.

А	Б	В	Г	Д
43	50	60	30	40

Розв'язок. Відомо, що центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника лежить на середині гіпотенузи, а це означає, що медіана, проведена з прямого кута є радіусом кола, отже, гіпотенуза дорівнює 26, а катети можна позначити 12 *x* та 5*x*. За теоремою Піфагора $(12x)^2 + (5x)^2 = 26^2 \Rightarrow (13x)^2 = (26)^2 \Rightarrow x = 2$. Периметр прямокутника є $12 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 26 = 60$

Відповідь 60; В

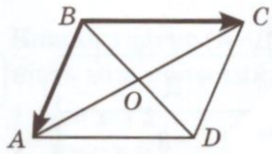
4. Укажіть інтервал, якому належить число $0,3 \cdot \lg 100$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1;\ 0)$	$(0,5;\ 1)$	$(1,5\ ;2)$	$(2;\ 2,5)$	$(-1,5;-1)$

Розв'язок. Обчислимо логарифм $0,3 \cdot \lg 100 = 0,3 \cdot 2 = 0,6$

Відповідь $(0,5;\ 1)$; Б

5. На рисунку зображено паралелограм $ABCD$. Укажіть правильну рівність.



А	Б	В
$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}$	$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Г	Д
$\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$	інша відповідь

Розв'язок.
Для розв'язку задачі достатньо скористатися геометричним означенням суми і різниці векторів. Для зручності, у випадках коли розглядається різниця, треба перейти до суми, для цього перенести вектор у праву частину.

Відповідь $\overline{BA}-\overline{BC}=\overline{CA}$; Г

6. Обчислити раціональним способом $\sqrt{\dfrac{81\cdot1239-81\cdot1230}{41^2-40^2}}$.

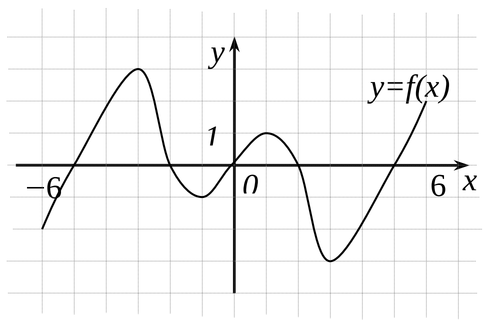
А	Б	В	Г	Д
41	81	9	3	12

Розв'язок.
Застосовуємо формули скороченого множення

$$\sqrt{\frac{81\cdot1239-81\cdot1230}{41^2-40^2}}=\sqrt{\frac{81\cdot(1239-1230)}{(41-40)\cdot(41+40)}}=\sqrt{\frac{81\cdot9}{81}}=\sqrt{9}=3$$

Відповідь 3; Г

7.На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$, визначений на проміжку $[-6;6]$. Укажіть кількість розв'язків рівняння $|f(x)|=1$.



А	4	Б	8
В	6	Г	3
Д	2		

Розв'язок. Графік функції дзеркально відображається відносно осі *OX*. Очевидно, що в цьому випадку горизонтальна пряма $y=1$ графік функції в восьми точках.

Відповідь 8; Б

8.Знайти об'єм правильної чотирикутної піраміди, у якої всі ребра однакові і дорівнюють $\sqrt{2}$.

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{2}{3}$	$8\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	1,5

Розв'язок.

В основі піраміди лежить квадрат з діагоналлю 2. Тоді висоту цієї піраміди знаходимо за теоремою Піфагора $H=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}=1$. Отже, знаходимо об'єм піраміди

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot H=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 1}{3}=\frac{2}{3}$$

Відповідь $\frac{2}{3}$; Б

9.Обчислити $\dfrac{\cos 300^0+\sin 150^0}{tg30^0\cdot ctg210^0}=$

А	Б	В	Г	Д
0	3	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$

Розв'язок. Використовуючи формули зведення, маємо

$$\frac{\cos 300^0+\sin 150^0}{tg30^0\cdot ctg210'^0}=\frac{\cos\left(270^0+30^0\right)+\sin\left(90^0+60^0\right)}{tg30^0\cdot ctg\left(180^0+30^0\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}}=1$$

Відповідь 1; В

10. Скільки коренів має рівняння $2\sqrt{x+5}=x+2$.

А	Б	В	Г	Д
чотири	один	два	жодного	три

Розв'язок.

Підносимо обмдві частини до квадрату та враховуємо ОДЗ

$$\left(2\sqrt{x+5}\right)^2=\left(x+2\right)^2\Rightarrow\begin{cases}4(x+5)=x^2+4x+4\\ x+2\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm 4\\ x\geq -2\end{cases}$$

$\Rightarrow x=4,$ рівняння має один корінь.

Відповідь один; Б

11. Знайти похідну функції $f(x)=\frac{5^x}{\ln 5}$ в точці x_0, тобто $f'(x_0)$, де $x_0=\log_5 7$

А	Б	В	Г	Д
7	3	25	5	49

Розв'язок.

Згідно таблиці похідних та правил диференціювання $f'(x)=\left(\frac{1}{\ln 5}\cdot 5^x\right)'=\frac{5^x\cdot\ln 5}{\ln 5}=5^x.$

Далі, застосувавши основну логарифмічну тотожність, маємо $f'(x_0)=5^{\log_5 7}=7.$

Відповідь 7; А

12. Кути ромба відносяться як 7 : 2. Знайти гострий кут ромба.

А	Б	В	Г	Д
160^0	20^0	π	40^0	60^0

Розв'язок. Протилежні кути ромба рівні, а сума суміжних дорівнює 180^0. Далі, $7x+2x=180^0$, $x=20^0$. Отже, менший кут дорівнює 40^0.

Відповідь 40^0; Г

13. Нехай $\left(x_0, y_0\right)$ – розв'язок системи $\begin{cases}3x+2y=7\\3x-2y=1\end{cases}$, знайти добуток $x_0\cdot y_0$

.

А	Б	В	Г	Д
3	2	0	1	4

Розв'язок.

Додаємо перше та друге рівняння, маємо $6x=8,\quad x=\frac{4}{3}$. З першого рівняння

$3\cdot\frac{4}{3}+2y=7 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{3}{2}. \qquad x_0\cdot y_0=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}=2$

Відповідь 2; Б

14. Майстер для виготовлення плати підготував 100 *мл* 10-відсоткового розчину соляної кислоти. Однак, заготовка нового типу потребувала використання 8-відсоткового розчину соляної кислоти. Скільки води треба додати до наявного розчину, щоб отримати потрібний ?

А	Б	В	Г	Д
2 *мл*	20 *мл*	10 *мл*	40 *мл*	25 *мл*

Розв'язок.

В первинному розчині сіль складає 10 *мл* (десять відсотків це десята частина). В утвореному розчині ця сіль складати 8%. Складаємо пропорцію

10 *мл* – 8%

x мл – 100%, *x* = 1000:8 =125 (*мл*), 125 – 100 = 25 (*мл*)

Відповідь 25; Д

15 Обчислити площу бічної поверхні циліндра, осьовим перерізом якого є квадрат з площею $\dfrac{36}{\pi}$.

А	Б	В	Г	Д
8	27	36	54π	54

Розв'язок.

Квадрат, про який йдеться в умові задачі, має сторону $\dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$, тоді радіус основи циліндра $R = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$, а висота $H = \dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$. Знаходимо площу бічної поверхні

$$S_{біч.пов.} = 2\pi RH = 2\pi \cdot \frac{3 \cdot 6}{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}} = 36$$

Відповідь 36; В

16. Вкажіть функцію, графік якої не проходить через точку з координатами (1;0)

А	Б	В	Г	Д
$y = \dfrac{2^x - 2}{\cos x}$	$y = -x^2 \cdot \log_2 x$	$y = \dfrac{x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{x^4 + 1}$	$y = \dfrac{x^2 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{x^6 + x^2 + 1}$	$y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

Розв'язок. Для функції, графік якої проходить через точку (1;0) має місце $y(1) = 0$, якщо не проходить – $y(1) \neq 0$. Остання умова виконується тільки для функції, позначеної літерою В, тобто $y(1) = \dfrac{1^2 \cdot \sin\left(\dfrac{\pi \cdot 1}{2}\right)}{1^4 + 1} = \dfrac{1}{2} \neq 0$

Відповідь $y = \dfrac{x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{x^4 + 1}$; В

У завданнях 17 –20 до кожного з трьох рядків інформації доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

17.Установіть відповідність між квадратичними функціями (1– 3) та кількістю точок перетину з віссю абсцис:

1 $y = f(x) = x^2 - 6x + 38$

2 $y = f(x) = -x^2 - 10x - 25$

3 $y = f(x) = x^2 - 8x$

А безліч

Б три

В дві

Г нуль

Д одна

Розв'язок.

1 $y = f(x) = x^2 - 6x + 38, \quad D = 36 - 4 \cdot 38 < 0$, квадратне рівняння коренів не має, отже точок перетину з OX теж немає.

2 $y = f(x) = -x^2 - 10x - 25, \quad D = 100 - 4 \cdot (-1) \cdot (-25) = 0$, квадратне рівняння має один корінь, отже одну точку перетину з ОХ .

3 $y = f(x) = x^2 - 8x, \quad D = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 64 > 0$, квадратне рівняння має два корені, отже дві точки перетину з ОХ .

Відповідь Г, Д, В

18. Установіть відповідність між нерівностями (1– 3) та множинами їх розв'язків:

1	$\lvert x-2 \rvert \le 2$	А	$x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$
2	$\lvert x-2 \rvert \le -2$	Б	$x \in \varnothing$
3	$\lvert x-2 \rvert \ge -2$	В	$x \in [-2;\ 2]$
		Г	$x \in [0;\ 4]$
		Д	$x \in (-\infty;\ +\infty)$

Розв'язок.

1 $\lvert x-2 \rvert \le 2 \quad \Rightarrow \quad -2 \le x - 2 \le 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le 4$

2 $\lvert x-2 \rvert \le -2 \qquad \lvert x-2 \rvert \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \varnothing$

3 $\lvert x-2 \rvert \ge -2 \qquad \lvert x-2 \rvert \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty;\ +\infty)$

Відповідь Г, Б, Д

19. Установіть відповідність між тригонометричним виразом (1– 3) та його значенням:

1	$\sin(1950^0) =$	А	$\sqrt{3}$
2	$\cos(1560^0) =$	Б	0,5
3	$tg\,(945^0) =$	В	$\sqrt{3}/2$
		Г	1
		Д	$-0,5$

Розв'язок.

Враховуємо періодичність тригонометричних функцій, маємо

1 $\sin(1950^0) = \sin(5 \cdot 360^0 + 150^0) = \sin 30^0 = 0,5$

2 $\cos(1560^0) = \cos(4 \cdot 360^0 + 120^0) = -\cos 60^0 = -0,5$

3 $tg\,(945^0) = tg\,(5 \cdot 180^0 + 45^0) = tg 45^0 = 1$

Відповідь Б, Д, Г

20. Установіть відповідність між геометричними фігурами (1-3) та їх площами :

1	прямокутник зі сторонами $a = \sqrt{\dfrac{15}{17}}$ та $b = \sqrt{\dfrac{51}{5}}$	А 6
		Б 8
2	круг радіуса $R = \sqrt{\dfrac{6}{\pi}}$	В 3
3	прямокутний трикутник з рівними катетами і гіпотенузою $4\sqrt{2}$	Г 5
		Д 17

Розв'язок.

1 Площа прямокутника $S = a \cdot b = \sqrt{\dfrac{15}{17}} \cdot \sqrt{\dfrac{51}{5}} = \sqrt{\dfrac{15 \cdot 51}{17 \cdot 5}} = 3$

2 Площа круга $S = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\sqrt{\dfrac{6}{\pi}}\right)^2 = 6$

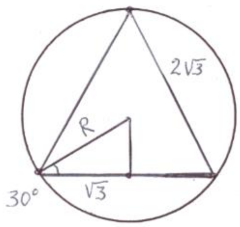
3 прямокутний трикутник з рівними катетами є рівнобедреним, його гіпотенуза дорівнює $4\sqrt{2}$, а катети по 4 . Площа трикутника $S = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 4 \cdot 4 = 8$

Відповідь В, А, Б

Розв'яжіть завдання 21–29. Одержані числові відповіді наберіть у відведеному для цього місці.

21.1(1 б) Заданий правильний трикутник зі стороною $2\sqrt{3}$. Знайти радіус описаного кола.

Розв'язок.



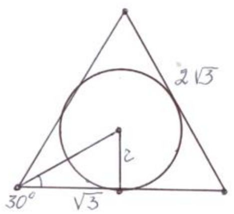
У правильному трикутнику всі сторони рівні і кути по 60^0, які діляться радіусами описаного кола навпіл, а перпендикуляр, опущений з центра кола на сторону ділить її на рівні частини. Отже, радіус описаного кола знаходимо як гіпотенузу прямокутного трикутника з відомим катетом та кутом 30^0.

Отже $R = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 30^0} = \dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$

Відповідь 2

21.2 (1 б) Заданий правильний трикутник зі стороною $2\sqrt{3}$. Знайти радіус вписаного кола.

Розв'язок.



У правильному трикутнику всі сторони рівні і кути по 60^0 . Точки дотику кола ділять всі сторони навпіл, а радіус, проведений в точку дотику перпендикулярний до сторони трикутника. Радіус вписаного кола знаходимо як катет прямокутного трикутника з відомим іншим катетом та протилежним кутом 30^0.

Отже $r = \sqrt{3} \cdot tg30^0 = \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1$

Відповідь 1

22.1 (1 б) Задані дві функції $f(x) = 2x+1,\quad g(x) = 2x-1$. Знайти похідну функції $y = f(x)\cdot g(x)$ у точці $x_0 = 2$.

Розв'язок.

$$y'(x) = \left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) = 2\cdot(2x-1) + (2x+1)\cdot 2 = 8x.$$

$$y'(2) = 8\cdot 2 = 16.$$

Відповідь 16

22.2 (1 б) Задані дві функції $f(x) = 2x+1,\quad g(x) = 2x-1$. Знайти похідну функції $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язок.

$$y'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{2\cdot(2x-1) - 2\cdot(2x+1)}{(2x-1)^2} = -\frac{4}{(2x-1)^2} \qquad y'(1) = -\frac{4}{(2\cdot 1-1)^2} = -4$$

Відповідь -4

23.1 (1 б) У кошику лежать лише червоні та зелені яблука. Кількість червоних яблук відноситься до кількості зелених, як 3 : 5. Знайти ймовірність того, що навмання вибране з кошика яблука виявиться червоним.

Розв'язок.

Вважаємо, що кількості червоних яблук $3x$, зелених $5x$, тоді всього – $8x$. За означенням ймовірності вважаємо, що кількості червоних яблук $3x$, зелених $5x$, тоді всього їх $8x$. За означенням ймовірності $P = \dfrac{3x}{8x} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$

Відповідь 0,375

23.2 (1 б) У кошику лежать лише червоні та зелені яблука. Кількість червоних яблук відноситься до кількості зелених, як 3 : 5. Знайти загальну кількість яблук у кошику, якщо зелених яблук у ньому було 30.

Розв'язок.

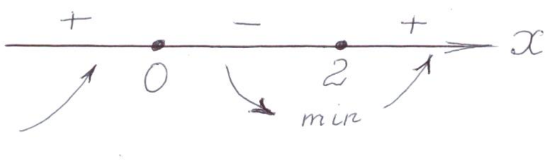
Вважаємо, що кількості червоних яблук $3x$, зелених $5x$, всього – $8x$. Тоді $5x = 30$, x = 6, всього яблук $8\,x = 48$.

Відповідь 48

24.1 (1 б) Задано функцію $y = x^3 - 3x^2$. Знайти точку мінімуму цієї функції.

Розв'язок.

$y' = 3x^2 - 6x = 3x\cdot(x-2)$.За допомогою метода інтервалів встановлюємо поведінку похідної функції:



Відповідь 2

24.1 (1 б) Задано функцію $y = x^3 - 3x^2$. Знайти мінімум цієї функції.

Розв'язок.

$y(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 = -4.$

Відповідь -4

25 (2 б) Обчислити $4\cdot\log_{81}27 + 7^{\frac{3}{\log_2 7}}$.

Розв'язок.

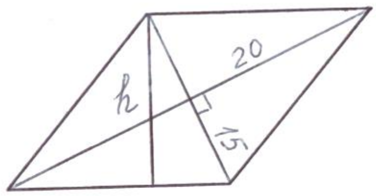
Перетворимо вираз, використовуючи формулу переходу до нової основи

$$4\cdot\log_{81}27 + 7^{\frac{3}{\log_2 7}} = 4\cdot\frac{\log_3 27}{\log_3 81} + 7^{\frac{3\cdot\log_2 2}{\log_2 7}} =$$

$$= 4\cdot\frac{3}{4} + 7^{3\log_7 2} = 3 + 7^{\log_7 2^3} = 3 + 8 = 11$$

Відповідь 11

26 (2 б) Знайти висоту ромба, діагоналі якого дорівнюють 40 *см* і 30 *см*.



Розв'язок.

Використовуємо властивості ромба, а саме: його діагоналі є перпендикулярні і в точці перетину ділять навпіл. Тоді легко знаходимо площу трапеції $S_{ромба} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 15 = 600.$

$S_{ромба} = a\times h,$ де $a -$сторона ромба, h – висота ромба.

За теоремою Піфагора $a = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25.$ Звідки $600 = 25\times h,$ $h = 24.$

Відповідь 24

27 (2 б) Пан Забувайло вирушив на моторному човні проти течії річки, не подивившись у бензобак. Через годину руху в нього скінчилося пальне, двигун затих, і йому залишався один вихід: щоб течія віднесла човен в зворотному напрямку. Через скільки годин після відплиття пан Забувайло опиниться на тому ж місті, звідки він розпочав свій шлях, якщо швидкість човна 15 *км/год*, а швидкість течії 3 *км/год* ?

Розв'язок.

Швидкість проти течії 15 – 3 = 12 (*км/год*), швидкість за течією при непрацюючому двигуні 3 (*км/год*). Через годину руху проти течії він опинився на відстані $12\ (км/год)\times 1 год\ = 12\ км$. Щоб подолати зворотну відстань при непрацюючому двигуні треба затратити $\frac{12\ км}{3\ (км/год)} = 4\ год$. Всього часу 1 *год* + 4 *год* = 5 *годин*.

Відповідь 5

28 (2 б) Розв'язати нерівнсть $\log_{\frac{1}{3}}(5 - x) \geq -1$ та у відповідь вказати добуток найбільшого та найменшого цілих розв'язків.

Розв'язок.

Здійснимо перетворення, користуючись властивостями логарифма та враховуючи ОДЗ знаходимо

$$\log_{\frac{1}{3}}(5-x) \ge -1\cdot\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(5-x) \ge \log_{\frac{1}{3}} 3 \Rightarrow \begin{cases}5-x\le 3\\5-x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \ge 2\\x < 5\end{cases} \Rightarrow x\in[2;\,5).$$

Добуток найбільшого та найменшого цілих 2 · 4 = 8.

Відповідь 8

29 (2 б) Між містами Дніпро та Брюссель немає прямого пасажирського сполучення. Для поїздки з Дніпра до Києва є 5 транспортних засобів, а з Києва до Брюсселя – 7. Скількома способами можна дістатися з Дніпра до Брюсселя ?

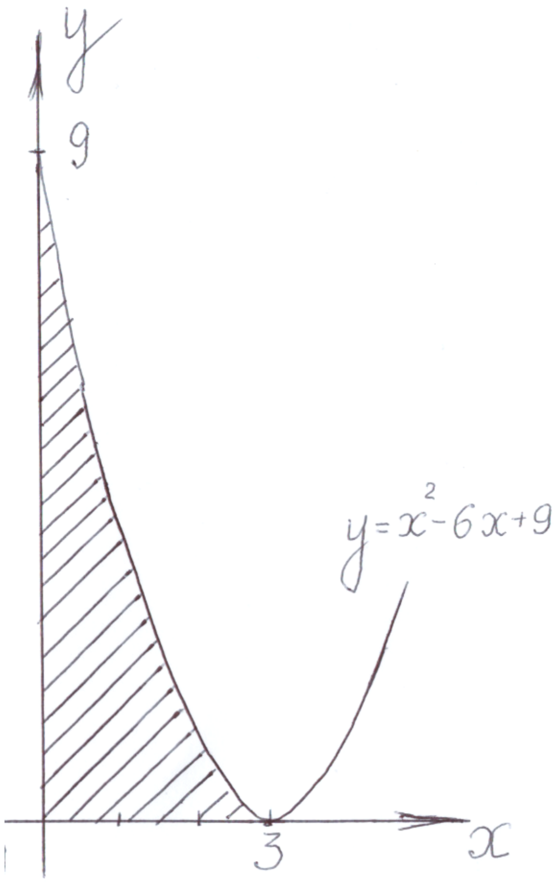
Розв'язок.

Згідно правила добутку в комбінаториці $7\times 5 = 35$

Відповідь 35

Розв'яжіть завдання 30,31. На державному ЗНО у бланку Б треба записати послідовні дії та пояснення всіх етапів розв'язання завдань, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. На пробному тестуванні треба лише набрати одержані числові відповіді у відведеному для цього місці.

30 (6 б) Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x) = x^2 - 6x + 9$ та осями координат.



Розв'язок.

Будуємо параболу, знайшовши вершину (3; 0), яка лежить на осі ОХ. Парабола перетинає вісь ординат в точці (0; 9). Фігура, яку обмежують координатині осі та парабола зображена на рисунку. Знаходимо площу цієї фігури за допомогою визначеного інтегралу:

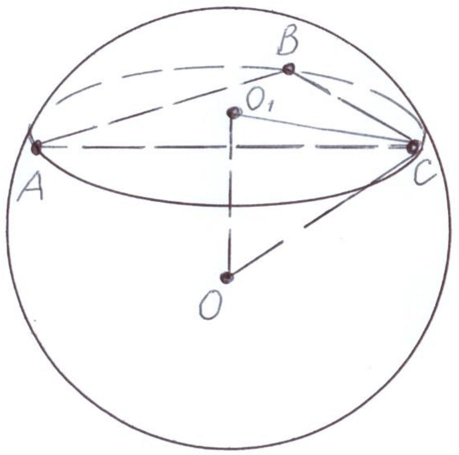
$$S = \int_0^3 \left(x^2 - 6x + 9\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 6\cdot\frac{x^2}{2} + 9x\right) =$$

$$\{\textit{в межах від } 0 \textit{ до } 3\} = \left(\frac{3^3}{3} - 6\cdot\frac{3^2}{2} + 9\cdot 3\right) - 0 =$$

$$= 9$$

Відповідь 9

31 (4 б) Вершини рівнобедреного трикутника з основою 30 см та кутом при основі 30^0 лежать на поверхні кулі, радіус якої дорівнює $5\sqrt{13}$. Знайти відстань від центра кулі до площини трикутника.



Розв'язок.
Площина, яка співпадає з заданим трикутником, перетинає кулю по колу з центром в точці O_1 та радіусом O_1C. а трикутник буде вписаний в це коло. Кут B при вершині цього рівнобед-реного трикутника дорівнює $180^0 - 2\cdot 30^0 = 120^0$. За теоремою синусів

$$\frac{AC}{\sin B} = 2\cdot O_1C \quad \text{або}$$

$$O_1C = \frac{30}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\cdot\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}.$$

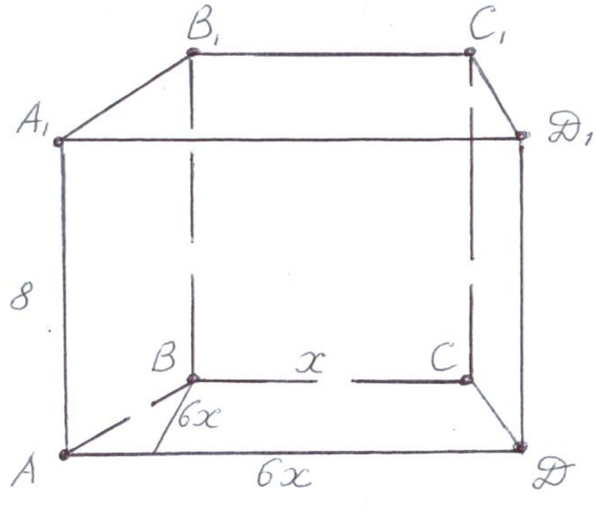
OO_1 – відстань від площини ABC до центра кулі O. За означенням $OO_1 \perp ABC \Rightarrow OO_1 \perp O_1C$, отже трикутник OO_1C – прямокутний. За теоремою Піфагора

$$OO_1 = \sqrt{OC^2 - O_1C^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{13}\right)^2 - \left(10\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{325-300} = \sqrt{25} = 5$$

Відповідь 5

Розв'яжіть завдання 32 – 34. На державному ЗНО у бланку Б треба записати логічні дії та пояснення всіх етапів розв'язання завдань, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. На пробному тестуванні треба лише набрати одержані числові відповіді у відведеному для цього місці.

32 (2 б) Основою призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є рівнобічна трапеція. Основа AD трапеції дорівнює висоті трапеції і в шість разів більша за основу BC. Знайдіть середню лінію трапеції, що лежить в основі призми, якщо об'єм призми дорівнює 672 *см*^{3}, а її висота – 8 *см*.



Розв'язок.
Об'єм призми знаходимо за формулою

$$V = S\times H = \frac{AD+BC}{2}\cdot H =$$

$$= \frac{x+6x}{2}\cdot 8 = 672 \quad \Rightarrow$$

$$x(x+6) = 28 \Rightarrow 7x^2 = 28 \Rightarrow x = 2.$$

Середня лінія $\frac{x+6x}{2} = \frac{7\cdot 2}{2} = 7.$

Відповідь 7.

33 (3 б) Якого найменшого значення набуває вираз $A = x^2 + y^2 - 8x + 12y + 55$, де x, y – дійсні числа.

Розв'язок.

Виділяємо повні квадрати для кожної змінної у заданому виразі

$$A = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 16 - 16 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 6 + 36 - 36 + 55 =$$
$$= (x-4)^2 + (y+6)^2 + 3.$$

Очевидно, що найменше значення виразу $A = 3$, яке він приймає при $x = 4$, $y = -6$

Відповідь 3

34 (6 б) При якому **найменшому цілому** значенні параметра a рівняння

$$\sqrt{2x+15} \cdot \left(\sqrt{x^2+18x+81} - \sqrt{x^2-10x+25}\right) = a\sqrt{2x+15}$$ має лише два різні корені ?

Розв'язок.

Перетворимо рівняння $\sqrt{2x+15} \cdot \left(\sqrt{x^2+18x+81} - \sqrt{x^2-10x+25} - a\right) = 0$

Далі, врахувавши формулу, $\sqrt{a^2} = |a|$

$$\sqrt{2x+15} \cdot \left(\sqrt{(x+9)^2} - \sqrt{(x-5)^2} - a\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{2x+15} \cdot \left(|x+9| - |x-5| - a\right) = 0.$$

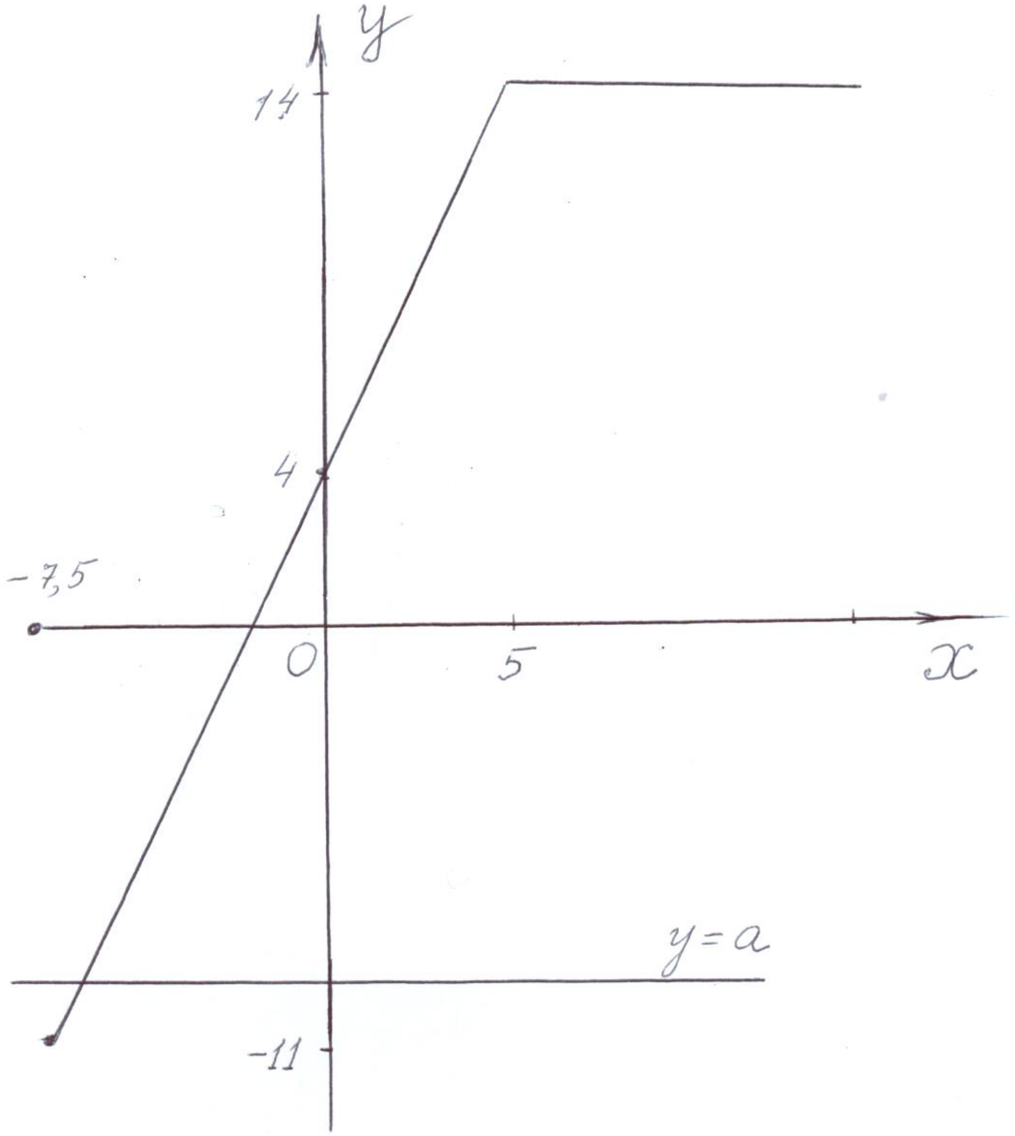
Звідки $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x+15=0 \\ |x+9|-|x-5|-a=0 \end{array}\right. \\ 2x+15 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-7,5 \\ |x+9|-|x-5|=a. \end{array}\right. \\ x \ge -7,5 \end{cases}$

Встановили, що рівняння вже гарантовано має один корінь $x = -7,5$. Щоб встановити кількість коренів, які визначає друге рівняння сукупності в залежності від значень параметра a, здійснюємо його геометричну інтерпретацію. Для цього будуємо графіки функцій $y = |x+9| - |x-5|$ та $y = a$. Розглянемо функцію з модулями на різних інтервалах

$$y = \left[\begin{array}{lll} -x-9+x-5 = -14, & \text{якщо} & x \le -9 \\ x+9+x-5 = 2x+4, & \text{якщо} & -9 < x \le 5 \\ x+9-x+5 = 14, & \text{якщо} & x > 5 \end{array}\right.$$

З урахуванням ОДЗ

$$y = \left[\begin{array}{lll} 2x+4, & \text{якщо} & -7,5 \le x \le 5 \\ 14, & \text{якщо} & x > 5 \end{array}\right.$$



Треба знайти при яких значення параметра а це рівняння має рівно один корінь (один вже знайдений). З графіку очевидно, щоб рівняння з сукупності мало ще один корінь, відмінний від $x = -7,5$, параметр a повинен належати проміжку $a \in (-11; 14)$

Відповідь – 10.